Curso Básico de Matemática Financeira

Celso H. P. Andrade

ÍNDICE

JURO

Segundo o Dicionário Eletrônico Aurélio - Versão 1.3:

Juro

[Do lat. jure.]
S. m.

1. *Lucro, calculado sobre determinada taxa, de dinheiro emprestado ou de capital empregado; rendimento, interesse. [Sin. (bras., RJ, gír.): jurema.]*
2. Fam. Recompensa (2).
3. Ant. Jus, direito.

- *Juro composto: O que se soma ao capital para o cálculo de novos juros nos tempos seguintes.*
- *Juro simples: O que não se soma ao capital para o cálculo de novos juros nos tempos seguintes.*
- Pagar com juros. Bras.: Pagar caro.

FATOR DE FORMAÇÃO DE JURO

O valor do juro é obtido aplicando-se a taxa de juros sobre um valor. A taxa é representada na forma percentual e o valor a que este percentual incide pode ser o valor aplicado (inicial de um investimento), o valor original de uma prestação, ou seja, sobre qualquer valor.

Passaremos a chamar o resultado desta divisão de **j** (fator de juro)*

$$\textbf{Valor\_Juro} = \textbf{Valor\_Aplicado} \times \frac{\textbf{Taxa\_Juros}}{\textbf{100}}$$

ou,

$$\boxed{\textbf{VJ = VA x j}}$$

* j = Taxa_Juros %   =>   j = 10 %   =>   j = 10/100   =>   j = 0,10

Exemplo:

- Uma determinada aplicação rende 5 % a.m. (ao mês), qual o valor do juro em um mês, para R$ 10.000,00 aplicados?

  R.: VJ = 10.000,00 x 0,05   =>   **VJ = R$ 500,00**

Este conceito pode ser aplicado para calcularmos o aumento de preço de um determinado produto. Basta usar o valor do aumento no lugar do VJ e o valor atual no lugar de VA.

- Um comerciante deseja aumentar seus produtos em 4 %. Qual o valor do aumento para um produto que custa R$ 500,00?

  R.: V_aumento = 500,00 x 0,04   =>   **V_aumento = R$ 20,00**

A partir deste fator, podemos determinar o **capital corrigido**, que é o resultado da **soma do valor inicial** com o **valor do juro.**

Valor_Corrigido = Valor_Aplicado + VJ

como já conhecemos VJ, **Valor_Corrigido = Valor_Aplicado + Valor_Aplicado x j**

ou ainda: **Valor_Corrigido = Valor_Aplicado x (1 + j)**

usaremos a seguinte notação: $\boxed{FV = PV \times (1 + j)}$

FV (Future Value) = Valor Futuro
PV (Present Value) = Valor Presente

As siglas são em inglês, pois é como encontramos na maioria das calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares.

Utilizando as informações do exemplo anterior:

- Se uma determinada aplicação rende 5 % a.m., quanto terá ao final de um mês quem aplicar R$ 10.000,00?

  R.: FV = 10.000,00 x (1 + 0,05) => **FV = R$ 10.500,00**

Da mesma forma, podemos aplicar este conceito na variação dos preços dos produtos: No lugar de FV obteremos o preço corrigido e no lugar de PV usaremos o preço atual.

- Um comerciante deseja aumentar seus produtos em 4 %. Qual o novo valor de um produto que custa atualmente R$ 500,00?

  R.: FV = 500,00 x (1 + 0,04) => **FV = R$ 520,00**

JURO SIMPLES

O juro simples é calculados somente sobre o capital, não havendo interferência dos juros passados em seu cálculo.

O valor calculado a partir do juro simples é resultante da multiplicação do fator de juros pelo valor inicial e pelo número de períodos.

VJ = PV x j x número_períodos → Substituiremos por **n**

Desta forma obtemos:

$$\boxed{VJ = PV \times j \times n}$$

e como **FV = PV + VJ**

$$\boxed{FV = PV \times (1 + j \times n)}$$

Exemplo:

- Se uma determinada aplicação rende 5 % a.m., qual o valor do juro em 4 meses, para R$ 10.000,00 aplicados e qual o valor no futuro?

  R.: VJ = 10.000,00 x 0,05 x 4 => **VJ = R$ 2.000,00**
  FV = 10.000,00 x (1 + 0,05 x 4) => **FV = R$ 12.000,00**

Se imaginarmos uma caderneta de poupança, cujo titular faz saques mensais no exato valor dos juros creditados, teremos um caso prático de juro simples, pois o valor do juro é calculado sempre sobre o capital aplicado.

Exemplificando:

Aplicação	=	5.000,00		
Rendimento 3,0 %	=	150,00	=>	(5.000,00 x 0,03)
Saque	=	150,00		
Rendimento 2,5 %	=	125,00	=>	(5.000,00 x 0,025)
Saque	=	125,00		

(e assim por diante...)

JURO COMPOSTO

O juro composto é calculado com base no capital e nos juros passados. Também é conhecidos como juro capitalizado.

Exemplificando:

Vamos imaginar um empréstimo de R$ 100.000,00 com uma taxa de 5 % a.m. por 3 meses com um único pagamento no final.

	Juro Simples	Juro Composto
1º mês	105.000,00	105.000,00
2º mês	110.000,00	110.250,00
3º mês	**115.000,00**	**115.762,50**

Como vimos anteriormente, o juro simples é calculado somente sobre o capital, portanto, o valor devido é de R$ 115.000,00 => 100.000,00 x (1 + 0,05 x 3).

Porém no juro composto, o cálculo é feito sobre o saldo devedor:

1º mês => 100.000,00 x (1 + 0,05) = 105.000,00
2º mês => 105.000,00 x (1 + 0,05) = 110.250,00
3º mês => 110.250,00 x (1 + 0,05) = 115.762,50

ou seja, 115.762,50 = 100.000,00 x 1,05 x 1,05 x 1,05

$$115.762,50 = 100.000,00 \times (1,05)^{3}$$

De uma forma genérica:

$$\boxed{\mathbf{FV = PV \times (1 + j)^{n}}}$$

Para calcularmos somente o juro é necessário que o capital seja desconsiderado:

$$\boxed{\mathbf{VJ = PV \times [(1 + j)^n - 1]}}$$

O mesmo cálculo utilizando juro composto:

- Se uma determinada aplicação rende 5 % a.m., qual o valor do juro em 4 meses, para R$ 10.000,00 aplicados e qual o valor no futuro?

  R.: $VJ = 10.000,00 \times [(1 + 0,05)^4 - 1]$ => **VJ = R$ 2.155,06**
  $FV = 10.000,00 \times (1 + 0,05)^4$ => **FV = R$ 12.155,06**

Equivalência de Taxa de Juros

Taxas de juros equivalentes são aquelas que representam a mesma taxa em um determinado período, ou seja, uma taxa expressa ao ano possui uma taxa equivalente em 2 anos, uma em 3 anos, outra em 1 dia, sendo que todas são equivalentes entre si.

Para calcularmos a taxa equivalente devemos levar a taxa da base original para a base desejada (a base original é a base em que a taxa está expressa) .

Para Juro Simples:

$$\text{Taxa\_Equivalente} = \frac{j}{\text{prazo\_de\_j}} \times \text{prazo\_equivalente}$$

Para Juro Composto:

$$\text{Taxa\_Equivalente} = (1 + j)^{(\text{prazo\_equivalente} / \text{prazo\_de\_j})} - 1$$

Exemplificando:

10 % em 2 períodos

Juro Simples:

$$\text{Taxa\_Equivalente\_2\_Períodos} = \frac{0{,}10}{1} \times 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{20{,}000\ \%}$$

em outras palavras, 20 % em dois períodos equivale a 10 % em um período

Juro Composto:

$$\text{Taxa\_Equivalente\_2\_Períodos} = (1 + 0{,}10)^{(2/1)} - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{21{,}000\ \%}$$

em outras palavras, 21 % em dois períodos equivale a 10 % em um período

No mercado financeiro brasileiro as taxas equivalentes são calculadas no modo composto, enquanto que na maioria dos países são calculadas no modo simples.

DESCONTO

Segundo o Dicionário Eletrônico Aurélio - Versão 1.3:

Desconto

[De des- + conto2.]
S. m.
1. Ato ou efeito de descontar.
2. V. abatimento (7).
3. *Cont*. Operação bancária de aquisição antecipada de títulos cambiais ou de legítimo comércio mediante um prêmio ou juro.
4. *Cont*. O prêmio ou juro dessa operação.
5. Bras. Perda de peso que o gado sofre durante uma viagem.

A taxa de desconto talvez seja a mais familiar de todas, quem nunca pediu desconto em uma compra?

A diferença entre o desconto e o juro é que o desconto é calculado a partir do valor futuro, enquanto que o juro sobre o valor presente.

usaremos: $d = \dfrac{\text{Taxa\_Desconto}}{100}$ => Fator de desconto

então temos: **Valor_Desconto = FV x d**

obtemos também:

PV = FV - FV x d
PV = FV x (1 - d)

Como já conhecemos a fórmula usando o juro, podemos determinar uma relação entre elas:

$PV = FV \times (1 - d) \Rightarrow \dfrac{PV}{FV} = 1 - d$ $\quad FV = PV \times (1 + j) \Rightarrow \dfrac{PV}{FV} = \dfrac{1}{1 + j}$ $\quad 1 - d = \dfrac{1}{1 + j}$

$$\boxed{d = \frac{j}{1 + j}}$$

$$\boxed{j = \frac{d}{1 - d}}$$

Aplicação para o conceito:

- Um determinado produto é vendido à vista com desconto de 10 %. Qual a taxa de juros que será paga por quem optar pela compra com cheque pré-datado para 30 dias?

R.: $j = \dfrac{0,10}{1 - 0,10}$ => $j = 0,11111$ => **Taxa de juros = 11,111 % a.m.**

As tabelas abaixo mostram a relação entre algumas taxas de desconto e a respectiva taxa de juros:

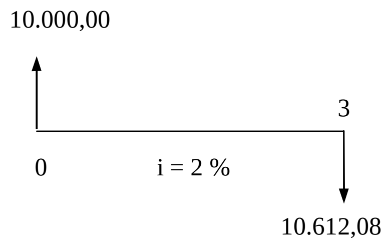
Tx Desc.	Tx Juros
1,000	1,01010
5,000	5,26316
7,500	8,10811
10,000	11,11111
15,000	17,64706
20,000	25,00000

Tx Desc.	Tx Juros
25,000	33,33333
30,000	42,85714
35,000	53,84615
40,000	66,66667
45,000	81,81818
50,000	100,00000

Tx Desc.	Tx Juros
55,000	122,22222
60,000	150,00000
65,000	185,71429
75,000	300,00000
90,000	900,00000
100,000	==X==

FLUXO DE CAIXA

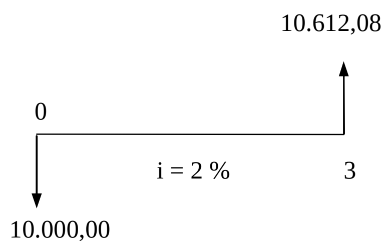
O fluxo de caixa é a representação gráfica de lançamentos (entradas e saídas), mesmo havendo apenas 2 lançamentos (uma entrada e uma saída), como nos casos estudados anteriormente.



O fluxo acima indica o seguinte:

- Foi feito um empréstimo (entrada de dinheiro) no valor de R$ 10.000,00, após 3 períodos foram pagos R$ 10.612,08 (saída de dinheiro), que representa capital mais juro, a taxa deste empréstimo foi de 2 %.

O ponto de vista representado foi o de quem pegou dinheiro emprestado, do ponto de vista de quem emprestou, teríamos o seguinte:



O que não mudaria o resultado, pois a taxa é a mesma para quem emprestou como para quem pegou emprestado.

O importante é que as setas (fluxos de entrada e saída de capital) sejam respeitadas, usaremos a seguinte convenção:

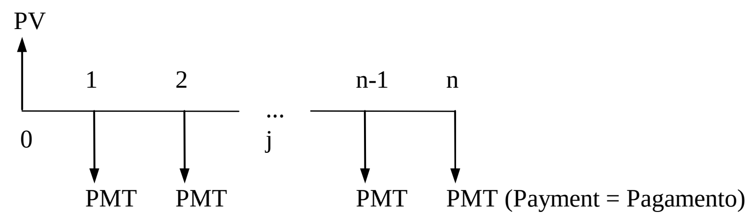
Seta para baixo => Saída de dinheiro

Seta para cima => Entrada de dinheiro

Os fluxos normalmente possuem mais de 2 lançamentos, que representam várias entradas e saídas. O estudo de fluxo de caixa será dividido em **Série Uniforme** e **Série Não Uniforme**:

Série Uniforme

O fluxo de caixa em que existe apenas uma entrada e várias saídas, sendo que as saídas são do mesmo valor e com períodos consecutivos (o raciocínio inverso é verdadeiro, ou seja, uma única saída para várias entradas, iguais e consecutivas) é conhecido como série uniforme. O caso típico é o de empréstimo com pagamento mensal das parcelas. Na série uniforme a variável **n** representará o número de pagamentos e não o número de períodos.



A taxa de um fluxo de caixa é representada com juro composto e faz com que o fluxo seja anulado, ou seja, o somatório dos pagamentos calculados no início do fluxo deve ser igual ao valor inicial.

Os valores dos pagamentos calculados no início do fluxo são obtidos através da aplicação da fórmula do juro composto:

$$\mathbf{FV = PV \times (1 + j)^{n} \quad => \quad PV = \frac{FV}{(1 + j)^{n}}}$$

Para a 1ª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_1} = \dfrac{PMT}{(1 + j)^{1}}$

Para a 2ª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_2} = \dfrac{PMT}{(1 + j)^{2}}$

Para a nª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_n} = \dfrac{PMT}{(1 + j)^{n}}$

então, como o valor inicial deve ser igual ao somatório:

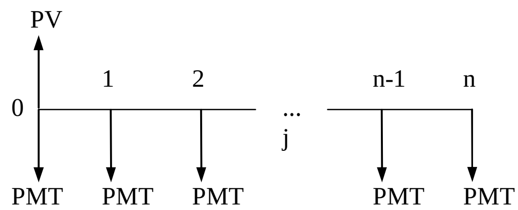
$$PV = \frac{PMT}{(1+j)} + \frac{PMT}{(1+j)^2} + \frac{PMT}{(1+j)^3} + \dots + \frac{PMT}{(1+j)^n}$$

Aplicando alguns conceitos matemáticos obtemos as fórmulas para fluxos de caixa **SEM entrada:**:

$$\boxed{PV = PMT \times \frac{(1+j)^n - 1}{(1+j)^n \times j}}$$

$$\boxed{PMT = PV \times \frac{(1+j)^n \times j}{(1+j)^n - 1}}$$

Poderemos ter o seguinte fluxo, que representa o pagamento das parcelas antecipadamente, como no caso um financiamento com entrada.



Existem duas formas de trabalharmos com este fluxo:

1) Subtrair o valor do pagamento do valor inicial e trabalharmos da mesma forma que o fluxo sem pagamento antecipado.

2) Utilizar as fórmulas: (obtidas seguindo o mesmo raciocínio anterior).

Para a 1ª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_0} = \dfrac{PMT}{(1+j)^0}$

Para a 2ª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_1} = \dfrac{PMT}{(1+j)^1}$

Para a nª prestação => $\text{Valor\_Prestação\_n} = \dfrac{PMT}{(1+j)^n}$

então, da mesma forma que anteriormente:

$$PV = \frac{PMT}{(1+j)^0} + \frac{PMT}{(1+j)^1} + \frac{PMT}{(1+j)^2} + \ldots + \frac{PMT}{(1+j)^n}$$

Aplicando alguns conceitos matemáticos obtemos as fórmulas para fluxos de caixa **COM entrada:**:

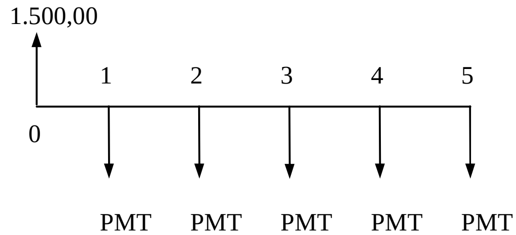
$$\boxed{PV = PMT \times \frac{(1+j)^n - 1}{(1+j)^{n-1} \times j}}$$

$$\boxed{PMT = PV \times \frac{(1+j)^{n-1} \times j}{(1+j)^n - 1}}$$

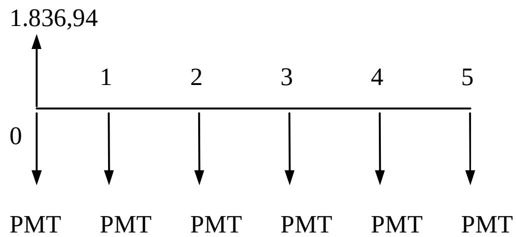
Vamos observar os seguintes fluxos:

i = 4 %

1º)



2º)



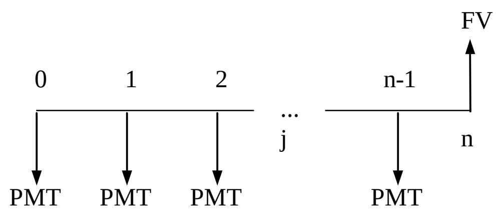
Usando as fórmulas:

$$1º)\ PMT = 1.500{,}00 \times \frac{(1 + 0{,}04)^5 \times 0{,}04}{(1 + 0{,}04)^5 - 1} \Rightarrow PMT = 336{,}94$$

$$2º)\ PMT = 1.836{,}94 \times \frac{(1 + 0{,}04)^{6-1} \times 0{,}04}{(1 + 0{,}04)^6 - 1} \Rightarrow PMT = 336{,}94$$

Isto acontece porque os 2 fluxos são iguais, não há diferença entre financiar R$ 1.500,00 sem entrada e R$ 1.836,94 com entrada de R$ 336,94, em ambos os casos a pessoa que pegou o empréstimo "embolsou" R$ 1.500,00, temos que atentar para mais um detalhe, quando não há entrada, o número de pagamentos é igual ao número de períodos do fluxo e no caso de haver entrada, o número de pagamentos é maior que o número de períodos do fluxo.

Podemos ter também o seguinte fluxo:



Cuja taxa obtida faz que a soma das parcelas representadas no futuro seja igual ao valor futuro.

Da mesma forma obtemos:

Para a 1ª prestação => Valor_Prestação_1 = $PMT \times (1 + j)^n$

Para a 2ª prestação => Valor_Prestação_2 = $PMT \times (1 + j)^{n-1}$

Para a nª prestação => Valor_Prestação_n = $PMT \times (1 + j)$

então,

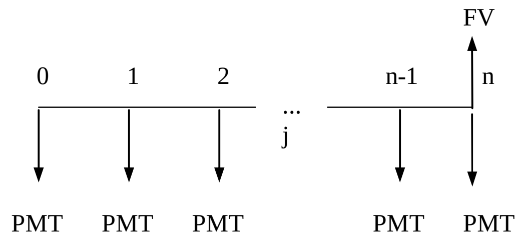
$$FV = PMT \times (1+j) + PMT \times (1+j)^2 + PMT \times (1+j)^3 + \ \ldots \ + PMT \times (1+j)^n$$

Aplicando alguns conceitos matemáticos obtemos as seguintes fórmulas para fluxos de caixa **SEM entrada**:

$$\boxed{FV = PMT \times \frac{(1 + j)^{n+1} - (1 + j)}{j}}$$

$$\boxed{PMT = FV \times \frac{j}{(1 + j)^{n+1} - (1 + j)}}$$

Da mesma forma podemos ter o fluxo com as parcelas no final do período:



Chegaremos nas seguintes fórmulas para fluxos de caixa **COM entrada**:

$$\mathbf{FV = PMT \times \frac{(1 + j)^{n} - 1}{j}}$$

$$\mathbf{PMT = FV \times \frac{j}{(1 + j)^{n} - 1}}$$

Vejamos algumas aplicações prática: Uma loja vende um determinado produto por R$ 10.000,00 à vista. Pode-se parcelar em até 4 vezes mensais e consecutivas. Quais os valores das parcelas com e sem entrada considerando que a taxa de juros cobrada é de 5 % a.m.

Sem entrada

1 pagamento => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{1} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{1} - 1}$ => **PMT = R$ 10.500,00**

2 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{2} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{2} - 1}$ => **PMT = R$ 5.378,05**

3 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{3} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{3} - 1}$ => **PMT = R$ 3.672,09**

4 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{4} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{4} - 1}$ => **PMT = R$ 2.820,12**

Com entrada

1 pagamento => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{1-1} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{1} - 1}$ => **PMT = R$ 10.000,00**
(não há financiamento)

2 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{2-1} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{2} - 1}$ => **PMT = R$ 5.121,95**

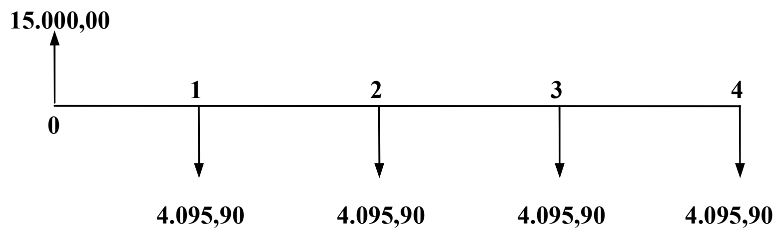
3 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{3-1} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{3} - 1}$ **=> PMT = R$ 3.497,22**

4 pagamentos => $PMT = 10.000,00 \times \dfrac{(1 + 0,05)^{4-1} \times 0,05}{(1 + 0,05)^{4} - 1}$ **=> PMT = R$ 2.685,83**

Não existe nenhuma fórmula que forneça a **taxa de um fluxo de caixa**, a taxa é calculada na base da tentativa e erro. Como vimos anteriormente, a taxa é determinada quando a soma dos valores de entrada for igual a soma dos valores de saída.

Vamos imaginar um financiamento de R$ 15.000,00 com 4 prestações de R$ 4.095,90 sem entrada:

PV = 15.000,00
PMT = 4.095,90
n = 4
i = ?



Como já vimos é necessário que os valores estejam representados no mesmo instante, portanto vamos escolher algumas taxas e fazer o cálculo, trazendo os valores das parcelas para o instante inicial.

	1 %	2 %	3 %	4 %
1ª parcela	**4.055,35**	**4.015,59**	**3.976,60**	**3.938,37**
2ª parcela	**4.015,19**	**3.936,85**	**3.860,78**	**3.786,89**
3ª parcela	**3.975,44**	**3.859,66**	**3.748,33**	**3.641,24**
4ª parcela	**3.936,08**	**3.783,98**	**3.639,15**	**3.501,19**
Total	15.982,06	15.596,08	15.224,86	14.867,69
PV - Total	-982,06	-596,08	-224,86	132,31

Neste caso, na medida que a taxa foi aumentando, a soma das parcelas foi se aproximando do valor inicial (R$ 15.000,00), até que o ultrapassou. Podemos afirmar com certeza que a taxa procurada está entre 3 % e 4 %. Fazendo mais algumas tentativas:

3,6 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.008,92
3,7 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.973,40

3,62 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.001,81
3,63 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.998,25

3,625 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.000,03
3,626 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.999,67

Agora depende da precisão desejada, neste caso se forem necessárias mais casas decimais (9 por exemplo) o resultado será: 3,625080076 %.

O quadro abaixo mostra o que acontece com o financiamento com o decorrer tempo, o saldo devedor vai diminuindo, até ser extinto no final do 4º mês, instante em que encerra-se a operação.

	Saldo Devedor	Taxa de Juros	Saldo Corrigido	Prestação
1º mês	15.000,00	3,625080076	15.543,76	4.095,90
2º mês	11.447,86	3,625080076	11.862,85	4.095,90
3º mês	7.766,95	3,625080076	8.048,51	4.095,90
4º mês	3.952.61	3,625080076	**4.095,90**	**4.095,90**

Saldo corrigido = Saldo devedor x (1 + Taxa de juros / 100)
Saldo devedor = Saldo corrigido (mês anterior) - prestação (mês anterior)

Usando a Calculadora

Obviamente não vamos fazer estes cálculos todos se tivermos uma calculadora financeira nas mãos. Vejamos como é simples usá-la (o padrão adotado será o da HP 12c).

As siglas já conhecemos:

n = Número de parcelas
i = Taxa
PV = Valor presente ou inicial
PMT = Parcela
FV = Valor futuro ou final

Devemos apenas observar alguns detalhes:

- Trabalha-se com a taxa na forma percentual;
- Os valores devem receber um sinal (positivo ou negativo) senão o fluxo não terá sentido. No exemplo anterior tínhamos um financiamento de R$ 15.000,00 (como é uma entrada de dinheiro adotaremos este lançamento como de sinal positivo) e 4 prestações de R$ 4.095,90 (como representam saída de dinheiro adotaremos este como de sinal negativo). Não haverá nenhum problema se os sinais estiverem invertidos, pois estará sendo representada a outra visão do fluxo;
- Usaremos apenas períodos inteiros;

1. ***f CLEAR FIN*** => Limpa os registros financeiros;
2. ***g end*** => Pagamento no final do período (sem entrada), no visor da calculadora somente aparece a indicação de **BEGIN**, indicando pagamentos antecipados;
3. ***4 n***;
4. ***15000 PV***;
5. ***4095,90 CHS PMT*** => A tecla CHS (change signal) inverte o sinal do número;
6. ***i*** => Como esta é a variável que procuramos, deve ser a última tecla a ser apertada, logo após a inclusão das variáveis, após algum tempo aparecerá o resultado no visor: **3,625080076** %.

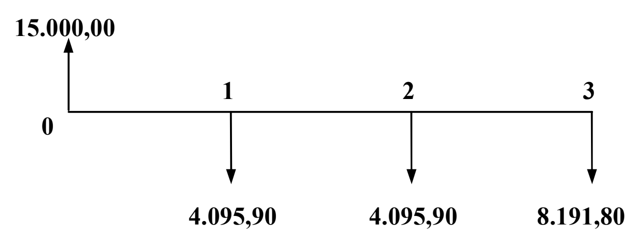
Série Não Uniforme

Se alguma regra da série uniforme não for respeitada (uma entrada para várias saídas iguais e consecutivas), teremos uma série não uniforme, ou seja, os prazos entre as parcelas podem variar, o valor das parcelas são diferentes ou podem haver entradas e saídas intercaladas no fluxo. Portanto as fórmulas válidas para a série uniforme não fazem sentido para a série uniforme.

O procedimento para cálculo da taxa na série não uniforme é o mesmo da série uniforme, ou seja, tentativa e erro. A taxa também é conhecida como Taxa Interna de Retorno.

Vamos imaginar que no exemplo da série uniforme as 2 últimas prestações estão sendo pagas juntas no 3º mês (o fato do valor das parcelas ser diferente caracteriza uma série não uniforme).

PV = 15.000,00
n = 3
IRR = ? (Internal Rate of Return)



Como a forma de calcular a taxa é similar ao da série uniforme, precisamos "trazer" os lançamentos para o instante inicial.

	2 %	3 %	4 %	5 %
1º lançamento	**4.015,59**	**3.976,60**	**3.938,37**	**3.900,86**
2º lançamento	**3.936,85**	**3.860,78**	**3.786,89**	**3.715,10**
3º lançamento	**7.719,32**	**7.496,66**	**7.282,48**	**7.076,38**
Total	15.671,76	15.334,04	15.007,74	14.692,34
NPV	-671,76	-334,04	-7,74	307,66

Antes de continuarmos com o cálculo para determinar a taxa, podemos observar que para cada taxa sugerida foi calculado o NPV (Net Present Value), valor presente líquido, que representa o somatório dos lançamentos (incluindo o valor inicial) calculados no instante inicial do fluxo.

Podemos afirmar com certeza que a taxa procurada está entre 4 % e 5%. Fazendo mais algumas tentativas:

4,0 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.007,74
4,1 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.975,71

4,02 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.001,32
4,03 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.998,12

4,024 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 15.000,04
4,025 % => Somatório das parcelas descapitalizadas = R$ 14.999,72

Se utilizarmos novamente 9 casas decimais o resultado é: 4,024125812 %.

O quadro abaixo mostra que, a série não uniforme e a série uniforme, possuem os mesmos conceitos em relação ao cálculo da taxa.

	Saldo Devedor	**Taxa de Juros**	**Saldo Corrigido**	**Prestação**
1º mês	15.000,00	4,024125812	15.603,62	4.095,90
2º mês	11.507,72	4,024125812	11.970,81	4.095,90
3º mês	7.874,91	4,024125812	**8.191,81**	**8.191,80**

Algumas vezes, devido a arredondamentos, aparecem pequenas diferenças.

É interessante observarmos que o fato de haver um lançamento maior e conseqüentemente uma prazo menor fez que a taxa da série não uniforme (4,024%) fosse maior que a da série uniforme (3,625%)

Usando a Calculadora

As funções utilizadas na série não uniforme são diferentes da utilizada na série uniforme. Devemos construir o fluxo na calculadora, por isso usaremos as seguintes teclas:

CFo = Cash Flow no instante inicial ("zero") => é o valor que inicia o fluxo
Cfj = Cash Flow em outro instante => são os demais lançamentos
Nj = Number of repetition => número de repetições do lançamento
IRR = Internal Rate of Return => taxa interna de retorno
NPV = Net Present Value => valor presente líquido

Algumas considerações:

- Trabalha-se com a taxa na forma percentual;
- Os valores devem receber um sinal (positivo ou negativo) senão o fluxo não terá sentido. No exemplo anterior tínhamos um financiamento de R$ 15.000,00 (como é uma entrada de dinheiro adotaremos este como positivo) e 3 prestações (como representam saída de dinheiro adotaremos como negativo). Se os sinais forem invertidos não terá problema algum, pois estará sendo representada a visão de que financiou;
- Os lançamentos devem ser ingressados na ordem cronológica
- As teclas ***begin*** e ***end*** não possuem nenhum efeito.
- Não precisa ser informado o prazo do fluxo, ele é calculado automaticamente com base na quantidade de lançamentos;
- O intervalo entre os lançamentos deve ser constante, os "buracos" existentes devem ser preenchidos com zeros. A taxa obtida estará representada neste período e deve ser aplicado o conceito de equivalência de taxa de juros para representá-la no período desejado (exemplo na página 28).

1. ***f CLEAR FIN*** => Limpa os registros financeiros;
2. ***15000 g Cfo*** => Inicia o fluxo;
3. ***4095,90 CHS g CFj*** => Valor do pagamento;
4. ***2 g Nj*** => Indica que o pagamento (lançamento) anterior será repetido por 2 vezes consecutivamente. Não é obrigatório, poderíamos repetir o passo anterior mais uma vez;
5. ***8191,80 CHS g CFj*** => Valor do pagamento;
6. ***f IRR*** =>Como esta é a variável que procuramos, deve ser a última tecla a ser apertada, logo após a inclusão dos lançamentos, após algum tempo aparecerá o resultado no visor: **4,024125812** %.

Para calcularmos o **NPV** com i = 3 % devemos proceder da seguinte forma:

7. ***3 i***;
8. ***f NPV*** => Após algum tempo o resultado aparecerá no visor: **-334.0379710**

Se somente o NPV for desejado o passo 6 deve ser omitido.

O resultado obtido (-334.04) indica que se desejarmos ter um retorno de 3% no investimento devemos desembolsar mais este valor (sinal negativo) no instante inicial, portanto o valor inicial do fluxo seria de 15.334,03.

E se desejarmos saber o **NPV** para i = 5 %:

7. ***5 i***;
8. ***f NPV*** => Após algum tempo o resultado aparecerá no visor: **307.6559766**

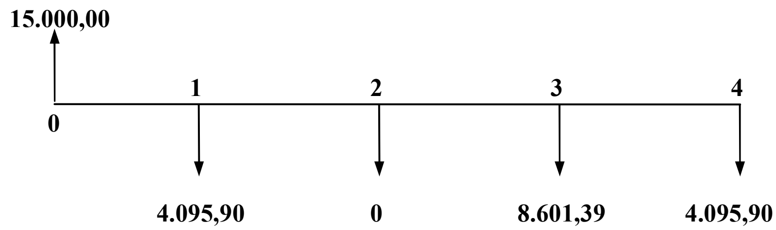
Neste caso o resultado obtido (307.66) indica que se desejarmos ter um retorno de 5% no investimento devemos desembolsar menos este valor (sinal negativo) no instante inicial, portanto o valor inicial do fluxo seria de 14.692,34.

Fica claro que se mantidos os lançamentos de um fluxo a taxa é maior para um investimento menor e vice-versa.

Veja como eliminam-se os “buracos” do fluxo. Vamos imaginar que no exemplo da série uniforme as 2ª parcela foi paga junto com a 3ª com acréscimo de 10%.

Teremos como 3º lançamento: 4095,90 x 1,10 + 4095,90 = 8.601,39

PV = 15.000,00
n = 4
i = ?



Vamos diretamente ao cálculo com as funções financeiras da calculadora.

1. ***f CLEAR FIN*** => Limpa os registros financeiros;
2. ***15000 g Cfo*** => Inicia o fluxo;
3. ***4095,90 CHS g CFj*** => Valor do 1º pagamento;
4. ***0 Cfj*** => “Valor do 2º pagamento”, se esta informação for omitida a calculadora considerará um fluxo de 3 períodos e não de 4;
5. ***8601,39 CHS g CFj*** => Valor do 3º pagamento;
6. ***4095,90 CHS g CFj*** => Valor do 4º pagamento;
7. ***f IRR*** =>Como esta é a variável que procuramos, deve ser a última tecla a ser apertada, logo após a inclusão dos lançamentos, após algum tempo aparecerá o resultado no visor: **4,22014700** %.

AMORTIZAÇÃO

Segundo o Dicionário Eletrônico Aurélio - Versão 1.3:

Amortizar

[De a-2 + morte -izar.]
V. t. d.
1. Passar (bens, haveres, etc.) para corporações de bens de mão-morta [V. bens de mão-morta.]
2. Extinguir (dívida) aos poucos ou em prestações.
3. Abater (parte de uma dívida), efetuando o pagamento correspondente:

Amortização

S. f.
1. Ato de amortizar.
2. Cada uma das parcelas das dívidas amortizáveis.

- Amortização de ações. Jur.

1. Operação pela qual as sociedades anônimas, dos fundos disponíveis e sem redução do capital, distribuem por todos os acionistas, ou por alguns deles, a título de antecipação, somas de dinheiro que caberiam às ações em caso de liquidação.

O valor da amortização está embutido no valor das parcelas ou pagamentos:

Valor_parcela = juro + amortização

Se uma dívida não for amortizada ela nunca acabará.

Sistema Francês

No sistema francês as prestações são fixas e os valores de amortização crescentes. A tabela price é uma adaptação do sistema francês.

Relembremos o exemplo da série uniforme:

Vamos imaginar um financiamento de R$ 15.000,00 com 4 prestações de R$ 4.095,90, já sabemos que a taxa deste fluxo é 3,625080076%.

mês	Sld. Dev.	Taxa Juros	Sld. Corr.	Prestação	Juro	Amortiz.
1º	15.000,00	3,625080076	15.543,76	4.095,90	543,76	3.552,14
2º	11.447,86	3,625080076	11.862,85	4.095,90	414,99	3.680,91
3º	7.766,95	3,625080076	8.048,51	4.095,90	281,56	3.814,34
4º	3.952.61	3,625080076	4.095,90	4.095,90	143,29	3.952,61

Saldo corrigido = Saldo devedor x (1 + Taxa de juros / 100)
Saldo devedor = Saldo corrigido (mês anterior) - Prestação (mês anterior) ou
Saldo devedor = Saldo devedor (mês anterior) - Amortização (mês anterior)
Prestação = Juro + Amortização

Sistema de Amortização Constante

Também conhecido por SAC, neste sistema as amortizações possuem valor fixo e as prestações valores decrescentes.

O valor da amortização é obtido a partir da divisão do valor da dívida pelo número de parcelas.

Se no exemplo anterior fosse adotado o SAC, teríamos o seguinte:

$$\text{Valor\_amortização} = \frac{15.000,00}{4} \Rightarrow \text{Valor\_amortização} = 3.750,00$$

Obtemos o seguinte quadro:

mês	Sld. Dev.	Taxa Juros	Sld. Corr.	Prestação	Juro	Amortiz.
1º	15.000,00	3,625080076	15.543,76	4.293,76	543,76	3.750,00
2º	11.250,00	3,625080076	11.862,85	4.157,82	407,82	3.750,00
3º	7.500,00	3,625080076	7.771,88	4.021,88	271,88	3.750,00
4º	3.750.00	3,625080076	3.885,94	3.885,94	135,94	3.750,00

Saldo corrigido = Saldo devedor x (1 + Taxa de juros / 100)
Saldo devedor = Saldo corrigido (mês anterior) - Prestação (mês anterior) ou
Saldo devedor = Saldo devedor (mês anterior) - Amortização (mês anterior)
Prestação = Juro + Amortização

Sistema de Amortização Misto

Também conhecido por SAM, neste sistema os valores de amortização são obtidos a partir da média aritmética entre os 2 sistemas anteriores.

Mantendo o exemplo:

mês	*Sist. Francês*	*SAC*	***SAM***
1º	3.552,14	3.750,00	**3.651,07**
2º	3.680,91	3.750,00	**3.715,46**
3º	3.814,34	3.750,00	**3.782,17**
4º	3.952,61	3.750,00	**3.851,31**

Obtemos o seguinte quadro:

mês	Sld. Dev.	Taxa Juros	Sld. Corr.	Prestação	Juro	Amortiz.
1º	15.000,00	3,625080076	15.543,76	4.194,83	543,76	3.651,07
2º	11.348,93	3,625080076	11.760,34	4.126,87	411,41	3.715,46
3º	7.633,47	3,625080076	7.910,19	4.058,89	276,72	3.782,17
4º	3.851,30	3,625080076	3.990,91	3.990,91	139,61	3.851,30

Obs.: Foi feito um pequeno ajuste para eliminarmos a diferença.

Saldo corrigido = Saldo devedor x (1 + Taxa de juros / 100)
Saldo devedor = Saldo corrigido (mês anterior) - Prestação (mês anterior) ou
Saldo devedor = Saldo devedor (mês anterior) - Amortização (mês anterior)
Prestação = Juro + Amortização

EXERCÍCIOS

Fator de Formação de Juro

1) Uma determinada aplicação rende 2 % a.m., quanto receberá de juros em 1 mês, quem aplicar R$ 30.000,00?

2) Existe uma aplicação que rende 3 % a.m., quanto deve ser aplicado para render de juros ao final de 1 mês R$ 450,00.?

3) Depositei R$ 2.500,00 na caderneta de poupança, no final do mês recebi o extrato que indicava haver um crédito referente a juros no valor de R$ 100,00. Qual a Taxa de Juro que recebi?

4) Um produto custava na semana passada R$ 50,00, hoje está R$ 3,00 mais caro. Qual o percentual do aumento deste produto?

Formação de Capital

5) Uma determinada aplicação rende 2 % a.m., quanto terá ao final de 1 mês quem aplicar R$ 30.000,00?

6) Existe uma aplicação que rende 3 % a.m., Quanto deve ser aplicado para se possuir no final de 1 mês R$ 15.450,00?

7) Depositei R$ 2.500,00 na caderneta de poupança, no final do mês recebi o extrato que informava que o meu saldo era de R$ 2.600,00. Qual a Taxa de Juros recebida?

8) Um produto que hoje custa R$ 53,00 custava na semana passada R$ 50,00. Qual o percentual do aumento deste produto?

9) Um investidor comprou 10.000 ações ao preço unitário de R$ 2,50. Hoje cada ação custa R$ 2,80.

9.1) Qual o valor investido?

9.2) Qual o valor atual do investimento?

9.3) Se as ações fossem vendidas qual seria o lucro do investidor?

9.4) Qual a variação percentual do patrimônio deste investidor?

Juro Simples

10) Uma aplicação de R$ 30.000,00 rende 2 % a.m.

10.1) Qual o valor dos juros em 4 meses?

10.2) Qual o valor no futuro?

11) Existe uma aplicação que rende 3 % a.m., quanto deve ser aplicado para se resgatar no final de 5 meses R$ 3.450,00?

12) Uma aplicação de R$ 2.500,00 rendeu, ao final de 2 meses, juros no valor de R$ 100,00. Qual a Taxa de Juros (a.m.) recebida?

13) Quanto tempo leva para obtermos R$ 3.900,00 de R$ 3.000,00 com uma taxa de juros de 1,5 % a.m.?

Juro Composto

14) Uma determinada aplicação de R$ 30.000,00 rende 2 % a.m.

14.1) Qual o valor dos juros em 4 meses?

14.2) Qual o valor no futuro?

15) Uma aplicação rende 3 % a.m., quanto deve ser aplicado para obter-se no final de 5 meses R$ 3.450,00?

16) Uma aplicação de R$ 2.500,00 por 2 meses rendeu no final do período juros no valor de R$ 100,00. Qual a Taxa de Juros recebida?

17) A caderneta de poupança rende juros de 0,5% a.m. mais correção monetária. Qual a taxa de juros anual deste investimento?

Equivalência de Taxa de Juros

18) Quais são as taxas equivalentes?

18.1) 25 % a.a. em 180 dias?

18.2) 21 % a.a em 30 dias?

18.3) 20,5 % a.a. em 61 dias?

18.4) 5 % a.m. em 90 dias?

18.5) 22 % a.a. em 91 dias?

18.6) 0,1 % a.d. em 180 dias?

19) Há 5 dias foi aplicado R$ 10.000,00 em um fundo de investimento cuja cota valia 3,098768650, hoje a cota vale 3,114072297.

19.1) Qual o percentual de variação da cota?

19.2) Quanto valerá a cota ao final de 30 dias de aplicação se forem mantidas as mesmas condições de valorização?

19.3) E se considerarmos dia úteis (3 decorridos e 22 no mês)?

20) Um banco anunciou indevidamente um CDB (Certificado de Depósito Bancário) que dobraria o valor investido em 180 dias.

20.1) Qual seria a taxa ao ano deste CDB?

20.2) Qual a taxa ao ano do CDB, sabendo-se que o investimento correto dobra o capital investido em 2 anos?

Desconto

21) Um produto que custa R$ 80,00 está sendo vendido por R$ 75,00. Qual a taxa de desconto oferecido?

22) Um determinado produto é vendido à vista com desconto de 12 %. Qual a taxa de juros que será paga por quem optar pela compra com cheque pré-datado para 30 dias?

23) Uma pessoa possui R$ 1.000,00 aplicados à taxa de 5 % a.m., uma televisão que custa R$ 1.000,00 é vendida com desconto de 5 % para pagamento à vista. A televisão deve ser comprada à vista ou com cheque pré datado para 30 dias?

24) Complete a tabela:

Tx Desc.	Tx Juros	Tx Desc.	Tx Juros
2,00000			2,00000
3,00000			3,00000
6,00000			5,00000
12,00000			10,00000
22,50000			15,00000
24,00000			20,00000

25) Um posto de gasolina oferece as seguintes condições de pagamento: Cheque para 90 dias ou desconto de 5 % para pagamento à vista. Qual a taxa de juros mensal paga por quem opta pelo pagamento em cheque?

Fluxo de Caixa - Série Uniforme

26) Um investidor aplicou durante 4 meses R$ 2.000,00. A taxa de 3 % a.m. permaneceu constante por todo o período. Qual era o valor que o investidor tinha ao final de cada mês?

27) Uma loja cobra juros de 6 % a.m., Quais são os fatores existentes na tabela do vendedor para 3, 4, 5 e 6 meses?

Fluxo de Caixa - Série Não Uniforme

28) Um agricultor fez um empréstimo de R$ 200.000,00 nas seguintes condições:
- Carência de 3 meses para o plantio;
- 5 pagamentos consecutivos de R$ 29.000,00 a partir do 4º mês;
- 1 mês sem pagamento;
- 3 pagamentos consecutivos de R$ 30.000,00 a partir do 10º mês.

28.1) Qual a taxa de juros deste financiamento?

28.2) Qual é a taxa, se o agricultor tomar mais um empréstimo de R$ 4.000,00 no 9º mês?

28.3) Qual é a taxa, se, em relação ao enunciado inicial, o agricultor tomar mais dois empréstimos de R$ 2.000,00 cada no 9º e no 10º mês?

Amortização

29) Considere um empréstimo de R$ 20.000,00 com taxa de juros de 2% a.m. e prazo de 5 meses.

29.1) Complete a tabela considerando o Sistema Francês de amortização e prestação de R$ 4.243,17.

Mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*

29.2) Com as mesmas informações, complete a tabela considerando o Sistema de Amortização Constante.

Mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*

29.3) Com as mesmas informações, complete a tabela considerando o Sistema de Amortização Misto.

mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*

RESPOSTAS

1) R$ 600,00

2) R$ 15.000,00

3) 4 % a.m.

4) 6 %

5) R$ 30.600,00

6) R$ 15.000,00

7) 4 % a.m.

8) 6 %

9.1) R$ 25.000,00 9.2) R$ 28.000,00 9.3) R$ 3.000,00
9.4) 12 %

10.1) R$ 2.400,00 10.2) R$ 32.400,00

11) R$ 3.000,00

12) 2 % a.m.

13) 20 meses

14.1) R$ 2.472,96 14.2) R$ 32.472,96

15) R$ 2.976,00

16) 1.98039 %

17) 6,16778 % a.a.

18.1) 11,18034 % 18.2) 1,60119 % 18.3) 3,21024 %
18.4) 15,76250 % 18.5) 5,15498 % 18.6) 19,71097 %

19.1) 0,4938622 % 19.2) 3,191731709 19.3) 3,212765997

20.1) 300 % a.a. 20.2) 41,42136 % a.a.

21) 6,25 %

22) 13,63636 % a.m.

23) Quem comprar à vista terá no final do mês R$ 52,50 e quem optar pela outra forma de pagamento, R$ 50,00.

24)

Tx Desc.	Tx Juros	Tx Desc.	Tx Juros
2,00000	**2,04082**	**1,96078**	2,00000
3,00000	**3,09278**	**2,91262**	3,00000
6,00000	**6,38298**	**4,76190**	5,00000
12,00000	**13,63636**	**9,09091**	10,00000
22,50000	**29,03226**	**13,04348**	15,00000
24,00000	**31,57895**	**16,66667**	20,00000

25) 1,72448 % a.m.

26) 1º mês = R$ 2.060,00 2º mês = 4.181,80
3º mês = R$ 6.367,25 4º mês = 8.618,27

27) 3 meses = 0,374109812 4 meses = 0,288591492
5 meses = 0,237396400 6 meses = 0,203362628

28.1) 2,07856 % a.m. 28.2) 1,85807 % a.m. 28.3) 1,86010 % a.m.

29.1)

mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*
1º	20.000,00	20.400,00	4.243,17	400,00	3.843,17
2º	16.156,83	16.479,97	4.243,17	323,14	3.920,03
3º	12,236,80	12,481,54	4.243,17	244,74	3.998,43
4º	8.238,37	8.403,14	4.243,17	164,77	4.078,40
5º	4.159,97	4.243,17	4.243,17	83,20	4.159,97

29.2)

mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*
1º	20.000,00	20.400,00	4.400,00	400,00	4.000,00
2º	16.000,00	16.320,00	4.320,00	320,00	4.000,00
3º	12,000,00	12,240,00	4.240,00	240,00	4.000,00
4º	8.000,00	8.160,00	4.160,00	160,00	4.000,00
5º	4.000,00	4.080,00	4.080,00	80,00	4.000,00

29.3)

mês	*Saldo Devedor*	*Saldo Corrigido*	*Prestação*	*Juro*	*Amortização*
1º	20.000,00	20.400,00	4.321,58	400,00	3.921,58
2º	16.078,42	16.399,99	4.281,59	321,57	3.960,02
3º	12.118,40	12.360,77	4.241,59	242,37	3.999,22
4º	8.119,18	8.281,56	4.201,58	162,38	4.039,20
5º	4.079,98	4.161,58	4.161,58	81,60	4.079,98